المنطق والرياضيات

مقدمة

١ — لا شك ان معظم الدراسات الفلسفية والعلمية مدينة للدراسات المنطقية في مناهج البحث بصورة خاصة ولقد ازداد اهتمام المناطقة في الفلسفة والرياضيات في وضع انظمة منطقية مختلفة الافكار والقواعد ، إذ لم يعد هناك منطق واحد هو منطق ارسطو ، لان هناك بجانب هذا المنطق انواعاً مختلفة اخرى ، وكل من هذه الانواع قائم على أسس وافكار معينة يتم بموجبها البناء المنطقي العام ولقد اتضح من دراسات الباحثين في شتى العلوم بان المنطق يكون القاعدة الاساسية ، بموجبها يكون للعلم صفة الدقة والتقدم ، كما ان لطريقة التحليل المنطقي فائدة جليلة للمشتغلين في العلوم الطبيعية والرياضية والانسانية، إذ أنها تساعد على تحليل الافكار وتعريف الغامض منها بغيـــة تحديد مفاهيمها ووضع المبادىء الاساسية التي يقوم عليها العلم وطريقة التحليل المنطقي في حقيقة الأمر منهج رياضي وفلسفي يعتمد أولا وقبل كل شيء على تحديد معاني الرموز أو اللغة التي يستعملها العلم ، وبهذة الواسطة يكون العلم قد تخلص بعض الشيء من المعاني المختلفة التي قد تقترن برمز واحـد أو بكلمة واحدة نتيجة لاستعمالاتها المختلفة وهنا يكمن السبب الرئيس في ظهور المتناقضات والملابسات في الفلسفة والبحوث العلمية واستعمال الطريقة المنطقية في التحليل معناه اذن تثبيت دعائم العلم لـكي يكون بنيانه سليما من الابهام والمغالطات التي تحصل نتيجة لعدم تحديد معاني العبارات التي يستعملها

٢ — وتظهر أهمية المنطق بشكل واضح في الدراسات الفلسفية والرياضية الحديثة ، فلم تعد الفلسفة مجرد تأمل في الافكار والمبادىء الميتافيزيقيـة ، بل انها استطاعت في هذا القرن ان تخرج من طريقة التأمل الفلسفي لتدخل مساهمة في الدراسات العلمية ، الرياضية منها والفيزياوية وكان للمنطق اهميـة كبيرة في الدراساب الرياضية الحديثة ، ولقد ساهم في بحث أ. س الرياضة وفي حل المتناقضات الموجودة فيها واصبحت للدراسـات المنطقيـة في الرياضيات اهمية كبيرة في جميع جامعـات العـالم ، واذا بالمنطق الرياضي Mathematical Logic يحتل مكانة بين فروع المعرفة المختلفة ، فيدرس في الفلسـفة والرياضيات على حد سواء

٣ — وموضوع هذا البحث بيان الصلة بين المنطق والرياضيات من نواحيها المختلفة وتبعاً للمدارس المنطقية المعاصرة ، مع الاخذ بنظر الاعتبار الدراسات الحديثة المهمة في هذا المجال كما سنعمل على التعريف بمبادىء المنطق الرياضي التي تكون القاعدة الاساسية لدراسة الصلة بين المنطق والرياضيات وسنركز اهتمامنا بصورة رئيسية على معرفة الأسس المنطقيةالعامة والمدارس المنطقية المختلفة وطبيعةالرياضيات وبيان أسسها المنطقيةوالفلسفية

واما الهدف الذي نتوخاه منهذهالدراسة فواضح ، لان هذا البحث لم يتطرق اليه احد بالعربية وسيظل بعيداً عن الفكر العربي اذا لم تأخذه يد البحث والدراسة ويمكننا ان نجمل اهداف هذا البحث بالنقاط الآتية :

١ ـ تعريف الطالب والباحث العربي على الصلة بين المنطق والرياضيات

٢ ـ بيان اهمية هذا البحث واتجاهاته الفكرية والعلمية

٣ ـ ان يكون هذا البحث في هذه الرسالة مقدمة بسيطة في المنطق الرياضي وفلسفة الرياضيات

كما لا يخفى على المتخصصين في الفلسفة المعاصرة ان أعظم اتجاهاتها الفكرية والعلمية

تستند على ما قدمه وانجزه المنطق الرياضي ، فلدينا مدارس فلسفية معاصرة تأخذ من المنطق قاعدة لبحوثها وتطوراً لمفاهيمها ، ومن اهم هـــذه المدارس الوضعية المنطقية Logical Positivism التي تعتبر المنطق قاعدة عامة لتوحيد العلوم أو لعلم موحـــد Einheitswissenschaft (١)

١ — المنطق : موضوعه ، تعريفه ، تطوره وطريقته

٤ — تختلف العلوم باختلاف الموضوع والمنهج ، فلكل علم موضوعه ومنهجه الذي يتبعه للوصول الى الحقائق والمنطق كغيره من العلوم له مادة بحث ومنهج او طريقة معينة

ولو نظرنا الى الدراسات المنطقية التي خلفها ارسطو (٣٨٤ ـ ٣٢٢ ق م) في كتاب الاورغانون أو الآلة Organon لوجدنا ان رائد المنطق يبدأ بدراســـة المكونات الاساسية للغة ، وما تحليله للغة الى مقولات الا دليل واضح على اهتمام ارســـطو باللغة كبداية لدراسة الاصول المنطقية والمقولات في الحقيقة اصناف عليا نستطيع بواسطتها ان نحلل العبارات اللغوية المختلفة وبعد دراسة ارسطو لمكونات اللغة ينتقل خطوة أخرى في التحليل فيهتم بدراسة خصائص العبارة اللغوية وتحديد مفهومها ، ثم ينتقل الى صياغـــة نظريته المنطقية في كتاب التحليلات الاولى Analytica Priora وبذلك يضع اصول اللغة المنطقية القائمة على الرموز دون الكلمات وعلى هذا الاساس يجب ان نميز بين اللغة الطبيعية Natural Language التي هي لغـــة التداول وبين اللغة الرمزية Symbolic Language او الفنية التي هي لغـــة المنطق فالدراسات المنطقية تبدأ أولا بتحليل لغة التداول وترتقي بعد ذلك الى بناء لغة دقيقة لها قوانينها واصولها المنطقية وتجدر الاشارة هنا الى ان هذه اللغة الفنية ليست منبثقة كلياً من لغة التداول ، بل ان بعض اجزائها المنطقية يتصل باللغة الطبيعية ، اما الاجزاء الاخرى فقد تكون من صلب

(١) Joergensen, Joergen., The Development of Logical Empiricism P. 4

علوم أخرى كما هو الحال عند بناء نظام منطقي يأخذ بنظر الاعتبار اسس الرياضيات [1]

(أ) موضوع المنطق

٥ـ يبدأ موضوع المنطق من التمييز بين لغة التداول واللغة الرمزية التي تعتمد على الرموز دون الكلمات والسبب الذي جعل المناطقة يختارون مثل هذه اللغة هو أن الدقة لا يمكن ان تتوفر في اللغة الطبيعية ، ومن الضروري ان نستعين بلغة رمزية او فنية دقيقة المعنى والتراكيب لنستطيع تفادي المتناقضات التي قد تظهر نتيجة لغموض معاني الاشياء واللغة الطبيعية ليست بدقة لغة الرياضيات مثلا ، لانها تحتوي على كلمات لها معان مختلفة ، فهناك النقل والمجاز والاشتراك في المعاني ، كل ذلك يؤدي الى غموض العبارة في اللغة الطبيعية ، في حين لا يحق لنا في لغة المنطق ان نعطي اكثر من معنى أو فكرة لرمز واحد ، كما لا يحق لنا ان نعطي لفكرة واحدة عدة رموز فمن الضروري اذن ان يكون لكل فكرة رمز واحد فقط ولكل رمز فكرة واحدة كذلك

اتبع ارسطو هذا المنهج فبدأ بتحليل اللغة في كتاب المقولات Categoriae وكتاب العبارة De Interpretatione وانتقل بعد ذلك الى بناء لغة رمزية منطقية في كتابه التحليلات الاولى واعقبها بالتحليلات الثانية Analytica Fosteriora حيث ناقش نظرية البرهان وخصائص العمليات البرهانية

والمنهج الذي سنتبعه هو المنهج المتقدم نفسه فنبدأ بتحليل اللغة وننتقل بعدئذ الى عمل اللغة المنطقية

٦ — يبحث علم اللغة Linguistics الظواهر اللغوية من نواح تتفق في بعض الاحيان مع الدراسات المنطقية ، ولكنها تختلف دائماً في الهدف والغرض الذي ترمي له النظرية المنطقية أو المنطق فعلم اللغة يهتم بدراسة التراكيب اللغوية والمعاني التي تدل عليها هذه

(١) Carnap, R., The Logical Syntax of Language P. 30

التراكيب دون أن يحاول بناء لغة رمزية ، فهو يركز اهتمامه على الخصائص اللغوية المختلفة للغات الطبيعية كما يدرس علم اللغة جميع العبارات بلا استثناء ، بينما من الضروري للمنطق أن يقوم ببناء لغة فنية ويدرس نوعاً معيناً من العبارات ، لذا فان تعريف اللغة في المنطق يخدم أولاً وقبل كل شيء الدراسات المنطقية

(١) تعريف اللغة :

اللغة نظام مؤلف من عبارات مختلفة التراكيب تخضع لقواعد نحوية معينة ، كما يكون لهذه العبارات وظيفة اجتماعية هي التبادل الفكرى والعاطفي والتفاهم بين الناس

يظهر هذا التعريف انه يأخذ بنظر الاعتبار الخصائص اللغوية الرئيسية الآتية :

١ ـ التراكيب اللغوية أو اللفظية للغة

٢ ـ المعنى أو المعاني التي تقترن بالتراكيب اللغوية

٣ ـ الافراد الذين يستعملون اللغة في وضعيات اجتماعية معينة

ويمكن دراسة هذه الخصائص كل على حدة فالعلم الذي يهتم بدراسة التراكيب اللغوية دون الاخذ بنظر الاعتبار المعاني المقترنة بالتراكيب يسـمى سنتاكس Syntax أو علم التراكيب اللغوية والعلم الذي يهتم بدراسة التراكيب اللغوية مع اعطاء الاهمية للمعنى يسمى سيمانطيقة Semantics او علم الدلالة او المعنى والعلم الذى يهتم بدراسة الخصائص الثلاث المذكورة من تراكيب ومعان وافراد يسمى براجماطيقة Pragmatics

٧ ـ ولكن المنطق وبصورة خاصة المنطق الشكلي Formal Logic لا يهتم الا بنوع معين من العبارات وهي تلك التي تحتمل الصدق او الكذب لذا فمن الضروري تحديد هذا النوع من العبارات بتعريف يحدد طبيعة القضايا المستخدمة في المنطق الشكلي

(٢) تعريف القضية :

القضية قول مفيد يحتمل الصدق او الكذب [١]

تبعاً لهذا التعريف نعتبر المنطق الذي يهتم بهذا النوع من القضايا منطقاً ذا قيمتين Two Valued Logic لان انظمته المختلفة مؤلفة من قضايا لها قيمتان لا غيرهما الصدق أو الكذب

ولكن البحوث الجديدة في المنطق الرياضي اثبتت وجود منطق آخر له قيم منطقية كثيرة ويدعى هذا المنطق Many Valued Logic او منطق القيم المتعددة

اما قضايا الرياضيات فانها لا تختلف عن قضايا المنطق من حيث انها تخضع الى معيار الصدق والكذب نفسه ، لان القضية الرياضية تكون اما صادقة او كاذبة فاذا قلنا ٢+١=٣ تكون هذه القضية صادقة ، بينما تكون القضية كاذبة في حالة كون الحاصل ٢+١=٤ وهكذا تخضع قضايا علم الحساب من هذه الناحية الى المعيار القائل ان القضية تكون اما صادقة او كاذبة

٨ — ويمكن تحليل هذا النوع من القضايا الى مستويين :

١ ـ يمكن دراسة القضايا من ناحية الشكل او الصورة Form فقط أي من ناحيتها التركيبية وهنا يتفق المنطق مع السنتاكس في معالجة العبارات اللغوية على مستواها الشكلي او التركيبي

٢ ـ يمكن دراسة القضايا من ناحية الشكل والمعنى او الدلالة ويتفق هذا البحث مع السيمانطيقة اللغوية في بعض النواحي

ومن الجدير بالذكر انه يجب التمييز بين السنتاكس اللغوي والسنتاكس المنطقي وكذلك بين السيمانطيقة اللغوية والسيمانطيقة المنطقية ، لان الافكار والمبادىء التي نستخدمها في

(١) وهو ما يسمى عند البلاغيين بالخبر De Int. Chapter 5, 17a

علوم اللغة تختلف اختلافاً واسعاً عن تلك التي نستخدمها في المنطق ، كما ان طريقة المعالجة في علم اللغة والمنطق مختلفة منهجاً وهدفاً

٩ — والمنطق الشكلي سمي كذلك ، لانه يهتم بالاشكال المنطقية فقط ومن دون ان يكون للمعنى في هذه الدراسة محل ولا يقتصر المنطق على بحث الاشكال المنطقية فقط ، بل انه يسعى كذلك الى بناء النظام او اللغة المنطقية المؤلفة من الاشكال او الصيغ المنطقية ويدعى هذا النظام المنطقي عادة بالحساب المنطقي Logical Calculus والغاية من الحساب المنطقي هي ان نحصل في الاخير على عمليات برهانية واستدلالية بشكل يسمح لنا بالبرهان على جميع القضايا الصحيحة التي تنتمي الى هذا النظام وهذه الطريقة الاستدلالية والحساب المنطقي هي في الحقيقة جوهر موضوع المنطق وستكون مهمتنا في هذه الرسالة دراسة علاقة هذا المنطق بالرياضيات ولكي نكون على بينة من المنطق الصوري وموضوعه يجدر بنا ان نعرفه ونحدد مفهومه العلمي

(٣) تعريف المنطق :

المنطق علم استدلالي يهتم بتحليل القضايا والبرهان

يتفق هذا التعريف من حيث الجوهر مع مفهوم المنطق القديم والحديث على حد سواء[١] ، وهناك تعريفات أخرى للمنطق تختلف من حيث الصيغة اللغوية ولكنها تتفق في الاخير مع التعريف المتقدم فيعرف رايخنباخ مثلا المنطق بانه عبارة عن تحليل اللغة [٢] ولقد استعمل رايخنباخ عبارة اللغة بمعناها المنطقي باعتبارها مؤلفة من افكار أولية وبديهيات ومبرهنات وبعبارة أخرى ان مفهوم اللغة هنا يتفق مع الحساب المنطقي ، واذا كان الحساب المنطقي نظاماً استدلالياً فيه عمليات برهانية ، فان هذا

(1) Church, A., Introduction to Mathematical Logic P. 1

(2) Reichenbach, H., Elements of Symbolic Logic P. 4

التعريف يتفق كذلك مع تعريفنا للمنطق

وعلى هذا الاساس لا يمكن ان نعتبر بعض تعريفات المنطق التي تحدد مفهومه بانه يهتم بدراسة قوانين الفكر Laws of Thought [1] صحيحة ، لان المنطق لا يهتم بالفكر وقوانينه وانما يتحدد بالاستدلال والتحليل والبرهان ويتفق في هـذا المجال والمفهوم مناطقة الرياضيات وفلاسفة التحليل ، إذ ليس من اختصاص المنطق ان يعرف كيف نفكر وما يجب ان يكون التفكير عليه ، لان ذلك من اختصاص علم النفس لذا نجد اتفاقاً تاماً بين لوكاسيافكس [2] ورايخنباخ [3] في هذه النقطة بان المنطق لا يهتم بقوانين الفكر

١٠ — ومن الملاحظ في تعريفنا المنطق بانه علم استدلالي اننا تركنا جانب العلوم التجريبية ، واقتصرنا على العلم البرهاني وبين العلم الاستدلالي والاستقرائي اختلاف واضح حيث يعتمد الاول على حقائق كلية كقضايا الرياضيات والمنطق بينما يعتمد العلم الاستقرائي على الملاحظة والتجربة وتكوين القوانين ولما كنا قد ذكرنا في تعريفنا للمنطق عبارة « علم استدلالي » فلا بد من تعريف هذه العبارة لكي يزداد تعريف المنطق وضوحاً

(٤) تعريف العلم الاستدلالي :

العلم الاستدلالي هو مجموعة قضايا أو صيغ متتابعة (بينها علاقة تتابع) تقع في فئتين : —

الفئة الأولى وتضم البديهيات والقوانين الاستنتاجية Rules of Inference .

الفئة الثانية وتضم المبرهنات

1) Ibid, P. 2

2) Lukasiewicz, J.. Aristotle's Syllogistic P. 12

3) Reichenbach, H., Elements of symbolic Logic P- 3

وتختلف البديهيات عن المبرهنات بان الأولى لا يمكن البرهنة عليها ولا تحتاج الى برهان في النظام المنطقي أو الرياضي الموجودة فيه أما المبرهنة فهي صيغة أو قضية تحتاج الى برهان، بل ومفتقرة اليه، فهي قضايا تتبع البديهيات بالضرورة ولتعريف البديهية والمبرهنة يجب أن نأخذ هذا الفرق بينهما : —

(٥) تعريف البديهية :

البديهية قضية أو صيغة تقع في بداية النظام المنطقي أو الرياضي، تتميز بكونها لا تفتقر الى برهان ولا تحتاج اليه، ولا يمكن البرهنة عليها ضمن النظام المنطقي الذي اختيرت منه، كما انها صادقة بالضرورة

(٦) تعريف المبرهنة :

المبرهنة قضية أو صيغة في النظام المنطقي أو الرياضي تتميز بانها تحتاج الى برهان في النظام الموجودة فيه

يظهر من هذه التعريفات اننا استخدمنا عبارة « برهان » التي بدورها تحتاج الى تعريف

(٧) تعريف البرهان :

البرهان Proof متوالية نهائية مكونة من صيغ أو قضايا (من صيغة أو قضية أو أكثر)، بحيث يكون في المتوالية اما بديهيات أو مبرهنات برهن عليها سابقاً [١]

ولتوضيح هذا التعريف نفترض ان القضية ں تحتاج الى برهان، فلكي نبرهن عليها نتبع طريقة منطقية، فأما أن نبرهن عليها بواسطة البديهيات والقوانين الاستنتاجية أو أن نبرهن عليها بواسطة قضايا مبرهن عليها وبديهيات وفي الحالتين نكون قد اتبعنا في البرهان خطوات منطقية متوالية مستعينين بالبديهيات أو بالقضايا المبرهنة أو بالبديهيات

(١) Church, A., Introduction to Mathematical Logic P. 49

والمبرهنات معاً حتى نصـــل إلى آخر قضية هي التي نريد البرهنة عليها . والعملية بأجمعها ندعوها « برهان القضية أو الصيغة ب »

١١ — يتضح مما تقدم المعنى العلمي للمنطق ، والشروط التي يجب أن تتوفر في هذا العلم ، كما يظهر لنا جلياً ان موضوع المنطق هو التحليل والبرهان وبعبارة أخرى الاستدلال بمعناه الواسع وبهذا المعنى والموضوع سنتتبع تطور هذا العلم منذ أيامه الأولى حتى العصر الحديث ، لنحصل على صورة عامة وموجزة لهذا العلم

نستطيع أن نقسم تطور المنطق الى ثلاث مراحل : —

ا — مرحلة المنطق القـــديم الذي يشمل منطق الحدود أو نظرية القياس لأرسطو ، وكذلك منطق القضايا عند المدرسة الرواقية

ب — مرحلة العصور الوسطى حيث المنطق امتداد لمنطق أرسطو مع اضافات قليلة إذ ظهر بعض المناطقة العرب أمثال السهروردي وابن سينا وغيرهم . وكان تأثير العرب في اسبانيا كبيراً ، فتأثر بطريقتهم المفكر الاسباني R. Lullus (١٢٣٢ — ١٣١٦) الذي وضع طريقته المعروفة بالفن الكبير Ars Magna البسيطة في تكوينها ، والتي بموجبها يمكن الحصول على جميع الحقائق وكان أثر هـــذا المفكر واضحاً في منطق ليبنتز G. W. Leibniz (١٦٤٦ — ١٧١٦) حيث بدأت منه مرحلة المنطق الرياضي الحديثة

١٢ — حـ — المرحلة الحديثة : ان الصورة الحقيقية للمنطق الحديث هي تلك التي تهتم بالرياضة وتطبيق طريقتها الدقيقـة على الافكار المنطقية وكان ليبنتز في هـذا المجال الرائد الأول حيث اقترح بنـاء لغة رمزية هي Characteristica Universalis الشبيهة بالحساب Calculus من حيث التكوين

أما مقومات هـــذه اللغة الرمزية والشروط التي يجب أن تتوفر فيها فيمكن اجمالها بالنقاط الآتية : —

١) يجب أن يكون بين رموز هذه اللغة والافكار علاقات متبادلة ، بحيث يكون لكل فكرة رمز واحد فقط ، وكذلك يجب أن يكون لكل رمز فكرة واحدة

٢) يجب أن يتركب من هذه الافكار البسيطة أفكار مركبة لها رموز معينة ، بحيث يكون تحليل هذه الأفكار مرفوقاً بتحليل للرموز

٣) يجب أن يكون لهذه الرموز أو التراكيب نظام مؤلف من قوانين استنتاجية بواسطتها نشتق صيغاً أو رموزاً منطقية جديدة [١] ويقترح ليبتز طريقتين منطقتين متأثراً بلولوس : —

ا) طريقة الاختراع Ars inveniendi وهي طريقة عامة نتوصل بواسطتها الى اشتقاقات أو إلى جميع النتائج من مقدمات مفروضة بالتوالي

ب) طريقة التقرير Ars iudicandi وهي طريقة نقرر بمساعدتها وبعد خطوات نهائية فيما اذا كانت العبارات أو الصيغ المنطقية موجودة في تتابع منطقي أم لا [٢]

١٣ — أما الوجه الثاني لتطور المنطق الحديث فيبدأ بجورج بول G. Boole (١٨١٥ — ١٨٦٤) الذي يعتبر رائد الطريقة الرياضية في المنطق ومحققها والمنطق الرياضي مدين لهذا الرياضي بشيئين : أولاً انه أثار من جديد علم المنطق على أسس رياضية محاولاً بذلك تطبيق الجبر على المنطق ، وثانياً انه وضع بالفعل صورة منطقية جديدة هي جبر المنطق Algebra of Logic في كتابه المشهور Laws of Thought وقد امتد تطور جبر المنطق حتى شمل بحوث الرياضي الألماني ارنست شرودر E. schröder في بحثه المعروف محاضرات عن جبر المنطق Vorlesungen über die Algebra der Logik

١٤ — أما الوجه الثالث فيبدأ بدراسات الرياضي جوتلوب فريجه G. Frege

1) Scholz, H., Abriss der Geschichte der Logik P. 52-53

(2) Hermes, H., Einführung in die Mathematische Logik P. 79

(١٨٤٨ — ١٩٢٥) الذي وضع مؤلفات عـديدة في غاية الاهمية والتي لا يزال المناطقـة يعتمدون عليها في بحوثهم ومن كتبه المشهورة في المنطق والرياضيات :

١ — رسالة في الأفكار Begriffsschrift

٢ — أسس علم الحساب Grundlagen der Arithmetik

٣ — القوانين الأساسية لعلم الحساب Grundgesetze der Arithmetik

ويقع في جزئين

وكانت غاية فريجه في هذه البحوث تتجلى في محاولاته لاخضاع الرياضيات الى المنطق ، بحيث نستطيع أن نشتق جميع قضايا الرياضة من أفكار ومبادىء منطقية فقط دونما حاجة الى الحدس والميتا فيزقيا وتجدر الاشارة هنا الى أن فريجه وضع أول نظام منطقي مبني على الطريقة الرياضية في وضع بديهيات وقوانين استناجية [١]

تتميز هذه المرحلة من التطور أن المناطقة أخذوا على عاتقهم هدف اخضاع الرياضيات الى المنطق أو بعبارة أخرى البحث عن اسس الرياضيات المنطقية فنتج ما يسمى حديثاً بفلسفة الرياضيـات ولقد شـارك في هذا المضمار بيـانو G. Peano (١٨٥٨—١٩٣٢) في Formulaire de Mathematiques حيث وضع البديهيات المعروفة باسمه في علم الحساب. ومن أهم البحوث في هذا الموضوع تلك التي قدمهـا برتراند رسـل B Russell والفريد نورث هوايتهيـد A. N. Whitehead في كتابهما أصول الرياضيـات Principia Mathematica الذي يقع في ثلاثة أجزاء ولقد تبعت هذا البحث بحوث كثيرة في فلسفة الرياضيات

١٥ — أما الوجه الرابع من التطور فيبدأ من ظهور كتاب أصول الرياضيـات حتى يومنا هذا ويتميز هذا التطور أن المناطقة ركزوا اهتمامهم على بحث المنطق وتطويره

1) Begriffsschrift.

باصول مختلفة ، فنجد في ذلك الاتجاهات الآتية :—

١ — البحوث المتعلقة بالمنطق الفوقي Meta-Logic والرياضيات الفوقية Meta-Mathematics

٢ — البحوث المتعلقة بالتقرير والسيمانطيقة

٣ — البحوث المتعلقة ببناء الأنظمة الرياضية

من أهم المناطقة في هذه البحوث هم دافيدهلبرت [١] D Hilbert (١٨٦٢—١٩٤٣) والفريد تارسكي [٢] A Tarski أما بحوث السنتاكس المنطقي فقد تطورت عند رودلف كارناب [٣] ونذكر كذلك بحث كورت جودل [٤] Kurt Gödel المتعلق ببناء الأنظمة المنطقية والرياضية وهل هي كاملة أو شاملة أم لا

وظهرت كثير من البحوث المتعلقة بتطوير طرق المنطق والمنطق بالذات ، ونذكر هنا على سبيل المثال المنطق الارتباطي Combinatory Logic لكوري [٥] ومنطق القيم الكثيرة [٦]

(ب) طريقة المنطق الرياضية :

١٦ — يستخدم المناطقة عبارة « Language » وهم لا يقصدون اللغة الطبيعية فحسب ، بل أن مفهوم هذه العبارة يتعدى الى جميع الأنظمة الشكلية في الرياضيات والمنطق فاللغة على هذا الأساس ما هي إلا نظام مؤلف من رموز تربطها علاقات معينة مكونة بذلك

1) Widerspruchsfreiheit der Mathematik.

2) Logic, semantics, Metamathematics

3) The Logical Syntax of Language.

4) Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls

5) Curry, H., & Feys, R., Combinatory Logic.

6) Rosser, J. B., & Turquette, A. R., Many-Valued Logic.

رموزاً أكثر تعقيداً ، فهي إذن حساب [1] . أما الأسباب التي دعت المناطقة الى توسيع مفهوم اللغة بهذا الشكل دون حصره باللغة الطبيعية فيرجع إلى :ـ

١ — إن اللغة المنطقية والرمزية تشبه اللغة الطبيعية من ناحيــة التركيب العام فهي تتألف من أفكار أولية تكون الفباء اللغة الرمزية ، ومن هــذه الأفكار تتكون القضــايا البسيطة ، ومن القضايا البسيطة تتكون القضايا المركبة ، ومن ثم تتكاثرهذه القضايا بواسطة قوانين استنتاجية معينة

٢ — من المفروض في اللغة أنها تتكلم عن اشــياء ، فاللغة الطبيعية مثلاً تصف لنـا الأشياء الموجودة في العالم الخارجي وتنقل الى الناس خبرات الأجيال السالفة ومعلومات الأفراد واللغة العلمية تتكلم أيضاً عن أشياء معينة تختلف عن الأشياء التي تصفها اللغــة الطبيعية فلــكل علم لغة معينة يستعملها للتعبير عن موضوعاته ، والأنظمة الرياضية والمنطقية هي لغات بهذا المعنى كذلك

وهنــا نقف على المفهوم الأســاسي لتعريف رايخنباخ للمنطق كما أسلفنا ذكره بأنه تحليل للغة

١٧ — نستنتج مما تقدم ذكره أن المنطق يهم بتحليل اللغة الطبيعية والعلمية ، ويستخدم لذلك طريقة معينة هي التحليل المنطقي Logical Analysis والتحليل المنطقي طريقة لتحليل أو توضيح الأنظمة المؤلفة من رموز بينها علاقات منطقية معينة [2] يدل هذا التعريف أن التحليل المنطقي يشترط النقاط الآتية :—

١ — تحليل القضايا أو الصيغ الىأجزائها الأولية ليتسنىلنا معرفة المركبات الأساسية للغة ، ومعرفة ما هو من صلب المنطق وما هو من غيره

1) Carnap, R., The Logical Syntax of Language P. 4.

2) Black, M., The Nature of Mathematics P. 24.

٢ — تعريف الأفكار وتحليلها بتحديد مفاهيمها ، لكي نستطيع بعد ذلك أن نضع الأسس لبناء الأنظمة المنطقية ، ومعرفة معنى العلاقات ووظيفتها في صياغة التراكيب المنطقية

ولما كان من برامج المنطق الرياضي وأهدافه اخضاع الرياضيات وارجاعها الى أفكار وأصول منطقية ، فاننا في تحليلنا المنطقي للرياضيات يجب أن نراعي الأمور الآتية :—

١ — ما هي المقومات الأساسية للرياضيات : ونقصد بالمقومات الأفكار والمبادىء التي تكون النظام الرياضي Mathematical System

٢ — اخضاع هذه الأسس أو المقومات الى المنطق

١٨ — ولكي نتفهم دور المقومات الأساسية في الرياضيات يجدر بنا الآن أن نعطي صورة مصغرة عن الأنظمة ، ولنأخذ مثلاً على ذلك نظرية بيانو في الأعداد الطبيعية [1]

توجد في هذه النظرية الأفكار الأولية الآتية : الصفر 0 ، العدد Number والتابع Successor ومن هذه الأفكار الأولية تتكون البديهيات الخمس في علم الحساب والتي سنذكرها عند بحثنا لأسس الرياضيات وبعد صياغة هذه البديهيات التي لا تحتوي غير المبادىء الأولية ينتقل بيانو الى البرهنة على قضايا الأعداد الطبيعية أو علم الحساب . من هنا نلاحظ أن المقومات الأساسية للرياضيات هي : —

١ — المبادىء الأولية وتضم الأفكار الأولية

٢ — البديهيات

٣ — القضايا أو المبرهنات

ونقصد بالأسس الرياضية الأفكار والمبادىء التي بواسطتها نستطيع أن نشتق جميع الرياضيات ولا بد ان نرجع هنا الى نظرية بيانو ، فاذا استطعنا ان نبرهن بان جميع الرياضيات ترجع الى مبادىء علم الحساب وأفكاره وأن جميع قضايا الرياضة يمكن استنتاجها

1) Russell B., Introduction to mathematical Philosophy p. 5.

بواسطة هذه النظرية ، فاننا نكون قد خطونا خطوة واسعة نحو اخضاع الرياضيات الى المنطق

١٩ — ومن هنا يبدأ عمل العالم المنطقي ، إذ يحاول أن يحلل قضايا أو صيغ علم الحساب لمعرفة المبادىء أو الأفكار المنطقية والرياضية ، كما أن هذا التحليل يساعدنا على كشف العلاقات بين القضايا والصيغ ثم يحاول المنطقي على ضوء ما توصل في التحليل الى تعريف الأفكار الرياضية وذلك بالاستعانة بالأفكار المنطقية مثل « فئة Class » وعضو في Member in a class وهكذا ثم يحاول كذلك رد بعض الأفكار الى الأخرى واخضاع هذه بالتالي الى أقل عدد ممكن وإذا توصل عالم المنطق الى إخضاع المبادىء والأفكار الرياضية الى مبادىء وأفكار منطقية ، فان البديهيات سوف لا تحتوي إلا على أفكار ومبادىء رياضية ترجع في أصولها الى المنطق وبواسطة رد بعض الأفكار الى البعض الآخر بواسطة التعريف يكون أمامنا واجب آخر هو إخضاع البديهيات الى مبادىء منطقية قليلة وإذا استطاع المنطقي ذلك تم ارجاع الرياضيات الى المنطق وهذا هو الهدف الرئيس في الفلسفة الرياضية

٢٠ — وكما للرياضيات طريقة معينة في بناء الأنظمة المختلفة ، فان للمنطق كذلك طريقة خاصة في بناء اللغة على أسس شكلية ولا بد أن نميز هنا بين اللغة كموضوع البحث وتسمى لغة الموضوع Object language وبين اللغة التي تتكلم عن لغة الموضوع وتسمى اللغة الفوقية [1]

---

(١) يعود فضل هذا التمييز الى الرياضي المعروف دافيد هلبرت حيث ميز كذلك بين الرياضيات وبين الرياضيات الفوقية ولقد استخدم رودلف كارناب والفريد تارسكي عبارتي Object language و Meta-language في أبحاثهما المنطقية

Meta-language والنظـام الصـوري أو الشكلي Formalsystem يمكن أن يكون على نوعين ، كل نوع يختلف من حيث التكوين عن النوع الآخر :—

١ — فاما أن يكون مؤلفاً من بديهيات Axiomatic System

٢ — أو يكون مؤلفاً من تعريفات System of Definitions

ويجب أن تتوفر في النظام الأول والثاني شروطاً معينة هي :—

ا — يجب أن يكون النظام كافياً Hinreichend لاشتقاق القضايا والأفكار المتبقية أو استنتاجها

ب — يجب أن يكون النظام خالياً من التناقض Widerspruchsfrei [١] وسنركز في هذه الرسالة بحثنا على نظام البديهيات لما له من علاقة مباشرة ووثيقة بالرياضيات

٢١ — يتألف النظام المنطقي من المقومات الأساسية الآتية : —

١ — من الحدود Terms التي تشمل :—

ا — الحدود الأولية Primitive Terms وهي مجموعة من الأفكار قد تكون لا نهائية

ب — العلاقات أو العمليات Operations التي بواسطتها يتم بناء حدود جديدة

حـ — القوانين البنائية Rules of Formation التي تبين كيفية تكوين الحدود الجديدة من الحدود الأولية والعلاقات

٢ — القضايا Propositions

ا — القضايا الأولية التي تتألف من محمولات وعدد من الرموز

ب — القضايا المركبة التي تتألف من القضايا الأولية ، وذلك بواسطة العلاقات أو الروابط المنطقية

1) Carnap, R., Abriss der Logistik p. 70.

٣ — البديهيات وقوانين الاستنتاج :

ا — البديهيات وهي قضايا أولية صادقة بالضرورة وقد يتألف النظام المنطقي أو الرياضي من عدد نهائي من البديهيات ، وقد يتألف من عدد غير متناهي [١]

ب — القوانين الاستنتاجية وهي صيغ منطقية تسمح لنا باشتقاق قضايا صادقة من مقدمات صادقة

٤ — المبرهنات : وهي قضايا تحتاج الى برهان ، ونبرهن عليها بواسطة البديهيات والقوانين الاستنتاجية ، وذلك باتباع خطوات منطقية محدودة

٢٢ — يظهر من تركيب النظام المنطقي أنه يبدأ بالأوليات التي تكون في الحقيقة الفباء اللغة المنطقية وكما تتكون اللغة الطبيعية من الفباء معين تتركب منه جميع الأقوال، كذلك تتركب الحدود والقضايا بواسطة الفباء النظرية المنطقية

وتلعب العلاقات في بناء هذه الأشكال والتراكيب دوراً مهماً إذ بغيرها لا يمكن أن يتحقق بناء النظام المنطقي ويجب أن نميز هنا بين الأفكار المنطقية ونقسمها الى مجموعتين : —

١ — الافكار الأولية التي لا يمكن تعريفها ضمن النظرية المنطقية [٢]

٢ — الأفكار التي يتم تعريفها بواسطة الافكار الأولية

وتتكون الصيغ المنطقية من الرموز الاولية ، كما تتكون القضايا من الرموز والعلاقات. وعلى هذا الاساس يمكن تعريف الصيغة كما يأتي : —

1) Curry, H., Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics p. 12.

2) Carnap, R., The Logical Syntax of Language p. 23

(هـ) تعريف الصيغة :

الصيغة Formula هي متوالية محدودة أو نهائية تتألف من الرموز الأولية [1]

ولكن من الضروري أن نعرف انه ليس كل متوالية نهائية مؤلفة من رموز تعتبر صيغة منطقية صالحة في النظام المنطقي وهنا تلعب القوانين البنائية دورها المهم في تحديد الصيغ الصالحة Well-formed Formulas [2] التي تصلح لأن تكون صيغاً منطقية في النظرية ثم نختار بعد ذلك من بين هذه الصيغ الصالحة البديهيات التي هي أوليات النظرية الاستدلالية وننتقل الى صياغة القوانين الاستنتاجية بشكل بحيث تسمح لنا بأن نحصل على صيغ منطقية صالحة من مقدمات منطقية صالحة وذلك بالاشتقاق أو الاستنتاج مباشرة

٢٣ — هذه الطريقة شبيهة بالطريقة البديهية Axiomatic Method في الرياضيات حيث يبدأ أي فرع من الرياضيات بقائمة من الحدود الغير معرفة وقائمة من الفرضيات أو المسلمات Postulates التي تحتوي هذه الحدود أما المبرهنات فيمكن اشتقاقها من المسلمات بطرق المنطق الشكلي [3]

يتضح الآن الصلة الوثيقة بين المنطق والرياضيات من حيث المنهج البرهاني الذي يتبعه كل واحد منها ، بالاضافة الى اعتماد الرياضيات في الاستدلال أو الاستنتاج على الطرق المعروفة في المنطق الشكلي فلكل نظرية منطقية إذن استدلال منطقي معين ، وبواسطة القوانين الاستنتاجية المستعملة في الاستدلال يتم البرهان وتكون القضية النهائية أو الأخيرة في البرهان هي القضية التي أردنا ان نبرهن عليها

1) Church, A., Introduction to Mathematical Logic p. 46

2) Ibid. p. 49

3) Ibid. p. 57

٣ — أصول المنطق الرياضي ومدارسه

٢٤ — قلنا من قبل ان المنطق علم استدلالي يهتم بتحليل القضايا والبرهان والغرض من التحليل كما بينا سالفاً يتجلى في معرفة المكونات الأساسية التي يبدأ منها بناء النظام المنطقي ولقد عرفنا القضية بأنها قول مفيد يحتمل الصدق أو الكذب. وتحليل القضية يجب أن يبين لنا شكلها المنطقي ونوعها [1] ، فلا بد اذن أن نميز بين القضيـــة وشكلها المنطقي

فاذا قلنا « سقراط انسان » كانت هـذه العبارة قضية صادقة ، أما القضية « سقراط فيلسوف روماني » فهي كاذبة ولـكننا لو استعضنا عن سقراط برمز غير معين القيمة مثل « ا » وقلنا « ا إنسان » فاننا في هذه الحالة لا نستطيع أن نقول فيما اذا كانت الصيغة أو العبارة الجديدة صادقة أو كاذبه اللهم إلا إذا عينا قيمة للرمز ا كما نستطيع الآن ان نخطوا خطوة أخرى فنرمز إلى العبارة « انسان » بالرمز « ب » فنحصل من جراء ذلك على الصيغة (ا ب) والتي تتـألف من موضوع ومحـمول وعلى هذا الأساس يمـكننا تعريف الصيغة أو الشكل المنطقي كما يأتي :

(٩) تعريف الشكل المنطقي :

الشكل المنطقي هو متوالية نهائية فيها جميع المكونات رموز والشكل المنطقي يمكن أن يتكون من موضوع ومحمول أو من محمول وموضوعات كثيرة ، وقد يتألف من قضايا يربطها رابط منطقي أو روابط منطقية

٢٥ — ويصدق الشيء نفسه فيقضايا الرياضيات، فلنأخذ العبارات الآتية لتحليلها :—

١) ا + ب = ب + ا

٢) ٢ + ٣ = ٣ + ٢

1) Black, M., The Nature of Mathematics p. 54

ان العبارة الأولى تتألف من رموز فقط فهي صيغة منطقية أو شكل منطقي ، أما العبارة الثانية والتي فيها تعيين لقيم كل من ا و ب فان لدينا قضية تحتمل الصدق أوالكذب وهي في هذه الحالة صادقة لأنها تفسير لقانون منطقي أو رياضي

وتتألف الصيغ الرياضية والمنطقية من مكونات أساسية تقوم ببناء كل صيغة أوشكل منطقي وهذه المكونات هي : —

١) ثوابت منطقية ورياضية

٢) ومتغيرات

ويمكننا تفسير هذه المكونات على ضوء ماتقدم ، فالصيغة الرياضية ا + ب = ب + ا تتألف من حدود غير معينة القيمة هي ا و ب ومن حدود لها قيمة معينة هي « + » ، « = » ، فالحدود التي غير معينة القيمة تسمى متغيرات Variables والحدود الأخرى تسمى ثوابت Constants وعلى هذا الأساس يمكن تعريف المتغير والثابت المنطقي كما يأتي : —

١٠) تعريف الثابت :

الثابت رمز له معنى ثابت معين ؛ انه رمز يدل على معنى لايتغير

(١١) تعريف المتغير :

المتغير رمز ليس له معنى ثابت معين [١] ، انه مجرد رمز يشير الى فراغ يمكن أن يوضع فيه عبارة ذات معنى أو حد له معنى

وبعد هذا التحديد ننتقل الآن الى دراسة خصائص الثوابت المنطقية والصيغ التي تتألف منها :

– يتبع –

1) Tarski, A., Introduction to Logic p. 4